Analisi Dimensionale

Daniele B. Provenzano, Sigillo 2024

Esempio 1 (Periodo del pendolo). *Consideriamo un pendolo semplice, cioè un oggetto di massa m appeso all'estremo di una fune inestensibile di lunghezza ℓ e immerso nel campo gravitazionale terrestre, in cui l'accelerazione è g . L'altro estremo della fune è attaccato al soffitto. Senza passare per le leggi di Newton, è possibile capire in che modo il periodo del pendolo dipende dalle altre grandezze che caratterizzano il sistema?*

Ovviamente la risposta è sì! Questo metodo è chiamato *analisi dimensionale*. Ecco come funziona.

1. **Identificare le grandezze che potrebbero influire sulla grandezza che vogliamo trovare.** Nel nostro caso, esse sono:
 - la massa m , le cui dimensioni si indicano genericamente con $[M]$;
 - il modulo dell'accelerazione di gravità g , con dimensioni $[g] = \frac{[L]}{[T]^2}$;
 - la lunghezza ℓ della fune, con dimensioni $[L]$.

Le dimensioni si indicano con la lettera maiuscola tra parentesi quadre, oppure semplicemente con l'unità di misura (kg, m, s...). Le lunghezze si indicano con $[L]$, i tempi con $[T]$, le masse con $[M]$, le temperature con $[\theta]$, le cariche elettriche con $[Q]$.

2. **Scrivere la grandezza da trovare come un prodotto delle grandezze identificate precedentemente, ciascuna di esse elevata ad un certo esponente incognito.** Nel nostro caso, il periodo del pendolo si scrive come

$$P = C m^\alpha g^\beta \ell^\gamma,$$

dove C è una costante adimensionale e gli esponenti α , β e γ sono da determinare.

3. **Tradurre la relazione appena scritta in termini delle dimensioni delle grandezze fondamentali.** Nel nostro caso, si ha

$$[T] = [M]^\alpha \left(\frac{[L]}{[T]^2} \right)^\beta [L]^\gamma,$$

dove abbiamo perso traccia della costante C perché essa non ha alcuna dimensione.

4. **Imporre l'uguaglianza tra le dimensioni dei due membri dell'equazione appena trovata.** Nel nostro caso otteniamo tre equazioni, una per ogni dimensione:

$$\begin{cases} 1 = -2\beta, \\ 0 = \alpha, \\ 0 = \beta + \gamma. \end{cases}$$

5. **Risolvere il sistema di equazioni appena trovato.** Nel nostro caso, la soluzione è $\alpha = 0$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 1/2$.
6. **Sostituire i valori degli esponenti nell'equazione di partenza.** Nel nostro caso si ha

$$P = C m^\alpha g^\beta \ell^\gamma = C m^0 g^{-1/2} \ell^{1/2} = C \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Il problema è risolto!

Problema 1 (Dimensioni di grandezze non fondamentali). Trova le dimensioni delle seguenti grandezze, in termini delle dimensioni delle grandezze fondamentali $[L]$, $[T]$, $[M]$, $[\Theta]$, $[Q]$:

- energia,
- momento angolare,
- campo elettrico,
- campo magnetico,
- calore specifico,
- conducibilità termica.

Problema 2 (Velocità delle onde su una corda tesa). Una corda omogenea di massa m e lunghezza l è sottoposta alla tensione τ . Quanto vale la velocità di propagazione delle onde trasversali sulla corda?

Problema 3 (Moto di un grave). Siano noti un'altezza h e l'accelerazione di gravità g . A partire da queste grandezze, come possiamo costruire una velocità? Come possiamo costruire un tempo?

Problema 4 (Tempo di cottura). Supponiamo che il tempo necessario per la cottura di una fetta di carne omogenea rispetti la relazione

$$t = A \frac{c}{k} \rho^\alpha m^{\frac{2}{3}},$$

dove A è una costante adimensionale, c è il calore specifico della carne, k è la sua conducibilità termica, ρ è la sua densità e m è la sua massa. Quanto vale il coefficiente α ?

Problema 5 (Fireball atomica, tratto dalla Finale della Gara a Squadre 2024). Quando esplose una bomba atomica, una fireball (“palla di fuoco”) si crea e si espande rapidamente. La fireball della prima bomba atomica aveva un raggio di 80 m dopo 0.006 s dall'esplosione. Sapendo che il modo in cui la fireball si espande nel tempo dipende soltanto dall'energia sprigionata dalla bomba e dalla densità dell'aria, quanto era grande il raggio della fireball dopo 0.016 s dall'esplosione?

Problema 6 (Potenza irradiata da una carica elettrica accelerata). La potenza elettromagnetica emessa da una particella carica accelerata dipende dalla sua carica elettrica q , dall'accelerazione a , dalla costante di permittività elettrica ϵ_0 e dalla velocità della luce nel vuoto c . Trovare la dipendenza funzionale che lega la potenza emessa a queste grandezze fisiche/costanti.

Problema 7 (Stime solari). Schematizziamo il Sole come una sfera ferma di massa M e raggio R , costituita da idrogeno monoatomico alla temperatura assoluta T . L'energia totale del sole può essere scritta come

$$E = W + U,$$

dove W è l'energia termica e U è l'energia potenziale gravitazionale. Quest'ultima può essere espressa come

$$U = A G M^\alpha R^\beta,$$

dove G è la costante di gravitazione universale e A è una costante adimensionale il cui valore assoluto è dell'ordine dell'unità. L'energia termica può essere scritta nella forma

$$W = B k_B T^\gamma,$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e B è una costante adimensionale.

1. Trova i valori di α , β e γ .
2. Sapendo che $W = -E$, esprimi la temperatura assoluta del Sole in funzione di M e R .

Problema 8 (Scaling volanti). Un aereo riesce a viaggiare ad un'altitudine costante mentre si muove a velocità u rispetto alla terra ferma.

- Mantenendo invariati gli altri parametri del problema, a quale velocità dovrebbe muoversi un aereo di dimensioni raddoppiate (in x , y e z) affinché possa viaggiare alla stessa altitudine del precedente?
- Se P è la potenza generata dai motori dell'aereo originario, quanto vale la potenza che i motori del secondo devono sviluppare per mantenerlo alla stessa quota?

Soluzioni

Soluzione 1 (Dimensioni di grandezze non fondamentali). Per rispondere a queste richieste, basta ricordarsi le definizioni delle grandezze o una qualsiasi equazione in cui esse compaiono. Le risposte sono:

- energia $\frac{[M][L]^2}{[T]^2}$,
- momento angolare $\frac{[M][L]^2}{[T]}$,
- campo elettrico $\frac{[M][L]}{[Q][T]^2}$,
- campo magnetico $\frac{[M]}{[Q][T]}$,

- calore specifico $\frac{[L]^2}{[T]^2[\Theta]}$,
- conducibilità termica $\frac{[M][L]}{[T]^3[\Theta]}$.

Soluzione 2 (Velocità delle onde su una corda tesa).

$$v = C \sqrt{\frac{\tau l}{m}}$$

Soluzione 3 (Moto di un grave). Risposte:

$$v = C \sqrt{gh}, \quad t = C \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Soluzione 4 (Tempo di cottura). Risposta:

$$\alpha = \frac{1}{3}.$$

Soluzione 5 (Fireball atomica). Il testo stesso ci dice che il raggio della fireball dipende dall'energia E sprigionata dalla bomba e dalla densità dell'aria ρ . Quale altra grandezza manca? Per avere un fronte che si espande nel tempo, serve il tempo stesso t ! Cerchiamo una combinazione di t , E e ρ con le dimensioni di una lunghezza, del tipo

$$R = C t^\alpha E^\beta \rho^\gamma,$$

dove α , β e γ sono numeri reali. Convertendo quest'espressione tra grandezze in equazione tra dimensioni, troviamo

$$[L] = [T]^\alpha \left(\frac{[M][L]^2}{[T]^2} \right)^\beta \left(\frac{[M]}{[L]^3} \right)^\gamma.$$

Eguagliando le dimensioni di entrambi i membri, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\beta - 3\gamma, \\ 0 = \alpha - 2\beta, \\ 0 = \beta + \gamma, \end{cases}$$

la cui soluzione è $\alpha = 2/5$, $\beta = 1/5$, $\gamma = -1/5$. Possiamo quindi scrivere

$$R(t) = C t^{2/5} E^{1/5} \rho^{-1/5},$$

dove C è una costante adimensionale, da cui

$$R(t_2) = R(t_1) \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{2/5} \approx 106 \text{ m},$$

dove $t_1 = 0.006 \text{ s}$ e $t_2 = 0.016 \text{ s}$.

Soluzione 6 (Potenza irradiata da una carica elettrica accelerata). Risposta:

$$P = C \frac{q^2 a^2}{\epsilon_0 c^3}.$$

Soluzione 7 (Stime solari). Risposte:

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1.$$

$$T = -\frac{AGM^2}{2Bk_B R},$$

non è negativa perché $A < 0$. Inoltre, si potrebbe dire qualcosa in più su B . Visto che l'energia termica è una grandezza estensiva, B sarà sicuramente proporzionale al numero di atomi nel Sole!

Soluzione 8 (Scaling volanti). Tramite l'analisi dimensionale, si trova che la forza che mantiene l'aereo in volo, contrastandone il peso, è del tipo

$$F = C\rho_{\text{aria}}Av^2,$$

dove A è una superficie.

1. Per l'aereo originario, vale che

$$C\rho_{\text{aria}}Au^2 \sim mg,$$

mentre, per quello ingrandito, vale

$$C\rho_{\text{aria}}A'u'^2 \sim m'g.$$

Dividendo membro a membro le due equazioni, si ottiene

$$\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{Am'}{A'm} = \frac{A(2^3m)}{(2^2A)m} = 2, \quad \implies \quad u' = \sqrt{2}u.$$

2. Per quanto concerne la potenza dei motori, si può ripetere lo stesso ragionamento per la quantità Fu , sfruttando il risultato trovato al punto precedente. Quello che si trova è

$$P' = 2^{7/2}P.$$